Лекция 9. Вейвлет преобразование и формула обращения

Докажем свойство унитарности преобразования Фурье (сохраняет скалярное произведение).

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Доказательство.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\overline{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\hat{f}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(x)e^{i\xi x}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\xi x}dxd\xi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle.$$

Рассмотрим преобразование Фурье для вейвлета: $\hat{\psi}^{a,b}$ выразим через $\hat{\psi}(a\xi)$.

$\psi^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ с учетом свойсва масштабирования преобразования Фурье

$F(f(at))=1/a\ Ff(\xi/a)$ преобразуем выражение:

$F\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t}{a}\right)\right) = \sqrt{a}\psi(at)$. Теперь учитываем свойство преобразования Фурье для сдвига: $F\psi^{a,b} = e^{-ib\xi}F\psi^{a,0}$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(a(t-b))\exp(-i\xi t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(at')\exp(-i\xi(t'+b))dt' =$$

$$= \exp(-ib\xi)\int^{\infty}\psi(at')\exp(-i\xi t')dt' = \exp(-ib\xi)\hat{\psi}(at)$$

Теорема. Для любых двух функций f,g из $L_2(R)$ выполняется равенство:

$$\frac{C_\psi}{2\pi}\langle f,g\rangle=\langle T^b f,T^b g\rangle,$$ где $$C_\psi=2\pi\int\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\xi|}d\xi<\infty.$$

Это есть аналог теоремы Парсеваля.

Смысл ограничения в том, что $C\psi$ конечно

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\xi|}d\xi<\infty.$$

В частности, необходимо, чтобы Фурье образ вейвлета имел в окрестности нуля ноль порядка больше единицы $\psi(0)=0$, слеловательно,

$$\psi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\exp(-i\xi t)|_{\xi=0}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt=0. \quad (3)$$

Следовательно, вейвлет должен удовлетворять условию (3)

Формула восстановления по вейвлет-пребразованию

Рассмотрим равенство $\frac{C_\psi}{2\pi}\langle f,g\rangle = \langle T^b f, T^b g\rangle$.

Докажем, что $f = \frac{2\pi}{C_\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(T^b f)_{a,b}\psi^{a,b}\frac{dadb}{a^2}$ в слабом смысле.

Это означает, что нужно доказать, что для любой функции g из $L_2(R)$ выполнено:

$\langle f,g\rangle = \frac{2\pi}{C_\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{a^2}(T^b f)(a,b)\psi^{a,b}\bar{g}(x)dx =$ меняем порядок интегрирования:

$$= \frac{2\pi}{C_\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{a^2}(T^b f)(a,b)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^{a,b}(x)\bar{g}(x)dx = \frac{2\pi}{C_\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{a^2}(T^b f)(a,b)(\overline{T^b g})(a,b) = \langle f,g\rangle$$

Следующая формула представляет собой формулу восстановления функции по вейвлет преобразованию:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{dadb}{a^2}(T^b f)(a,b)\cdot\psi^{a,b}(x) \qquad (1)$$

при условиях $0<C\psi<\infty$, $\psi \in L_2(R)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt = 0$

Обобщение формулы восстановления:

Пусть ψ1(t), ψ2(t) – два семейства вейвлетов. Пусть мы имеем вейвлет-преобразование по одному семейству:

$Tbf = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_1^{a,b}(x)dx$, а восстанавливать будем по другому семейству:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_{\psi 1\psi 2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{dadb}{a^2}\left(T^b f\right)\psi_2^{a,b}(x)$$

Доказывается аналогично прошлой лекции, но с заменой C_ψ на $C_{\psi1\psi2}$, где

$$C_{\psi 1\psi 2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi)\hat{\psi}_2(\xi)|}{|\xi|} d\xi .$$

Поточечное восстановление функции по ее вейвлет-преобразованию

Если выполнены условия: $\psi_1(t), \psi_2(t) \in L_1(R), \exists \psi_2'(t) \in L_2(R), t\psi_2(t) \in L_1(R)$, Значения $\hat{\psi}_1(0) = \hat{\psi}_2(0) = 0$, $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{L}_2(\mathrm{R})$ и ограничена , то формула восстановления выполняется поточечно, точнее, в каждой точке непрерывности f выполнено:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi} \lim_{\substack{A1\to 0 \\ A2\to\infty}} \int_{A1\le|a|\le A2} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \left\langle f, \psi_1^{a,b} \right\rangle \cdot \psi_2^{a,b}$$ здесь существование интегралов понимается в смысле главного значения: